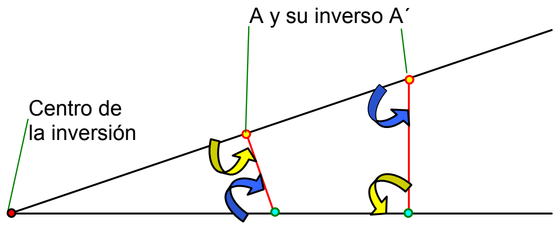
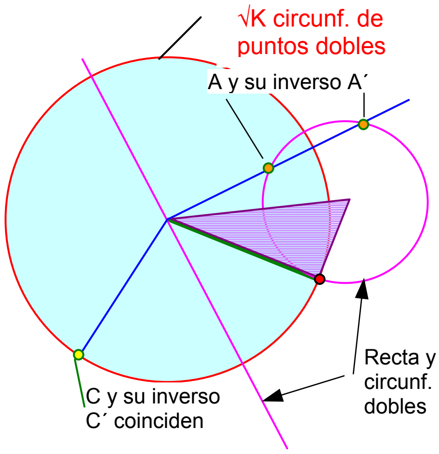
INVERSIÓN

- Es una homografía en la que, fijado un centro de inversión O o polo, el valor del producto de las distancias a otros dos alineados (OA x 0A´ = K) es constante (se llama constante de inversión o potencia de la inversión). Si un punto se acerca al centro su inverso se alejará de él.



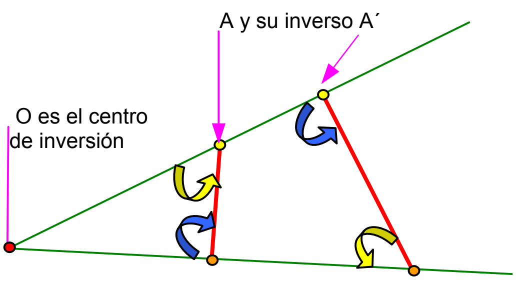
- Las rectas que los unen (AB y A´B´) no son inversas entre sí, pero si son antiparalelas porque tienen ángulos iguales e inversos. Los dos triángulos OAB y OA´B´ son semejantes.
- La mayor utilidad de la inversión se relaciona con su capacidad de transformar rectas en circunferencias y viceversa bajo ciertas condiciones.



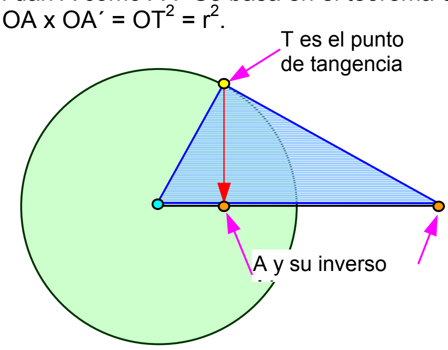
- Es una correspondencia puntual y recíproca, es decir, que si A´ es el inverso de A, éste lo será a su vez de A´.
- Se define por dos puntos o por el valor de K.
- Gráficamente suele venir dada por el centro y una circunferencia llamada de puntos dobles o básica, porque su radio mide $\sqrt{K} \rightarrow$ (OA = OA´). En ésta se hallan todos los puntos que son inversos de sí mismos.
- Si K>0, los puntos homólogos están al mismo lado del centro; si K<0 los puntos estarán uno a cada lado de 0 y no habrá circunferencia de puntos dobles al no existir raíces de números negativos.
- Además de la circunferencia de puntos dobles existen otros elementos geométricos dobles. Por ejemplo lo serán todas las rectas que pasan por el centro de inversión O, ya que los puntos inversos están alineados con él.
- También serán dobles las circunferencias que tengan con respecto al centro de la inversión potencia igual a raíz de K. Otra manera de expresar esto es refiriéndolas a puntos: serán dobles todas las circunferencias que pasen por dos puntos inversos. Todas éstas son ortogonales a la circunferencia de puntos dobles.

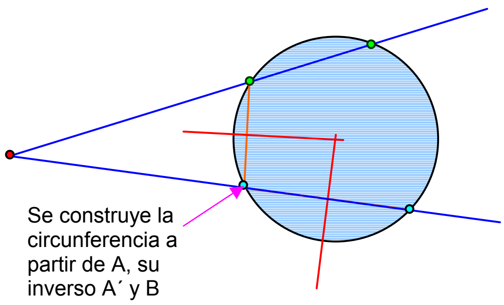
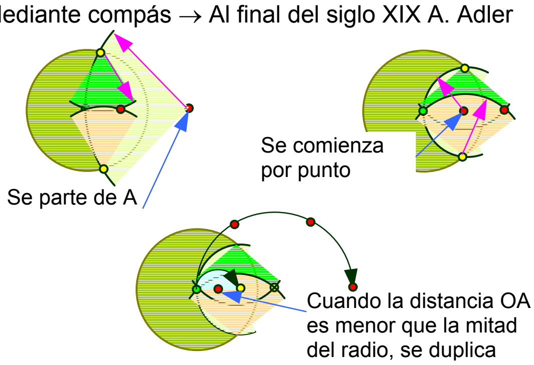
¿Cómo construir el inverso de un punto dado?

Por antiparalelismo → dada la inversión por O, A y A´, basta construir el ángulo OA´B´ = OAB. No es un procedimiento útil.

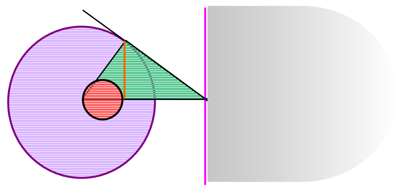


Por triángulación → dados O y raíz de k. Es válido tanto si dan A como A´. Se basa en el teorema del cateto OA x OA´ = OT^2 = r^2.

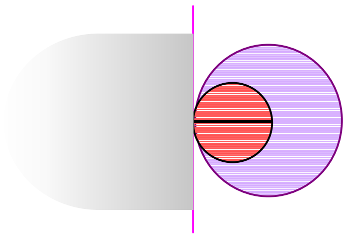


Mediante una circunferencia de puntos dobles →	Mediante compás → Al final del siglo XIX A. Adler
	

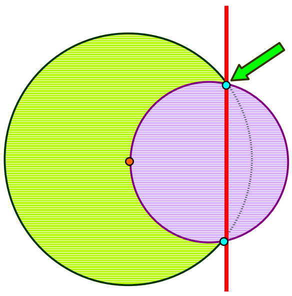
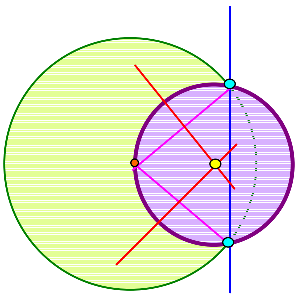
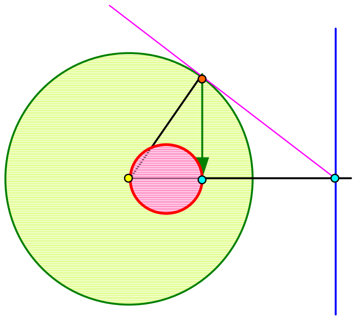
- **Inversión de rectas y circunferencias**
  - La figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que si pasa por él. Recíprocamente, la figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por él. La recta que aparece no es tal, sino una circunferencia de radio infinito.



  - Dadas una circunferencia y una recta no tangentes, es posible considerarlas inversas una de la otra en inversiones cuyos centros son los extremos del diámetro perpendicular a la recta. En el caso de ser tangentes la recta y la circunferencia, serán inversas según un centro coincidente con el otro extremo del diámetro perpendicular.

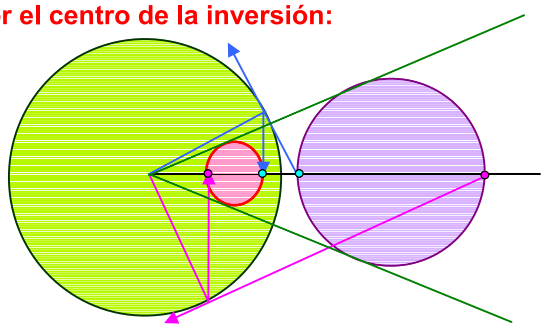


- **Construir rectas inversas a circunferencias que pasan por el centro de inversión y viceversa**

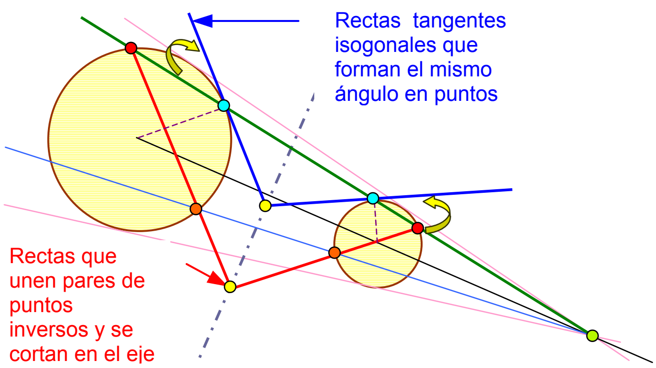
Si la circunferencia que pasa por O corta a la de puntos dobles, bastará unir los puntos de corte al ser éstos dobles y por tanto pertenecer también a la recta.	Si dan la recta, es suficiente con trazar la circunferencia que pasa por tres puntos (los de corte y el centro de la inversión).	Si no la corta, será necesario hallar el inverso de uno o más puntos por alguno de los procedimientos ya comentados.
		

Circunferencia inversa a otra que no pasa por el centro de la inversión:

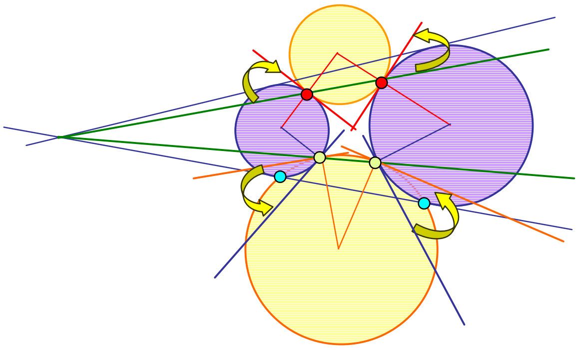
- La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que tampoco pasa por él y que mantienen entre sí una relación de homotecia con el mismo centro que la inversión y razón K/P.



- Las circunferencias y las rectas inversas tienen varias propiedades. Las rectas que unen parejas de puntos inversos en dos circunferencias (rectas BC y B´C´) se unen en el eje radical de ambas circunferencias o son paralelas a él.
- Las tangentes a cada una de las circunferencias por un par de puntos inversos también se cortan en el eje radical. Los ángulos que forman dichas tangentes con la recta que une los puntos inversos son iguales.



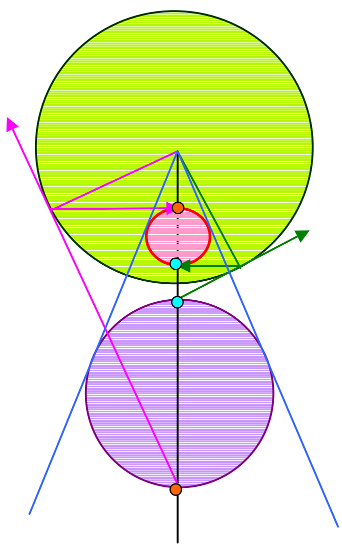
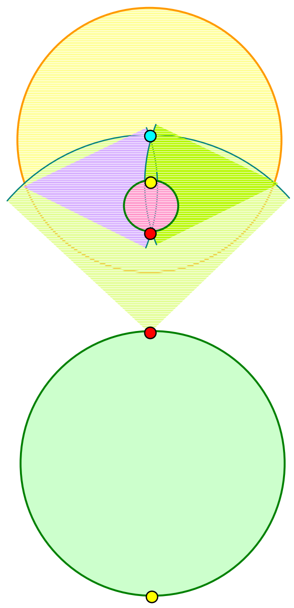
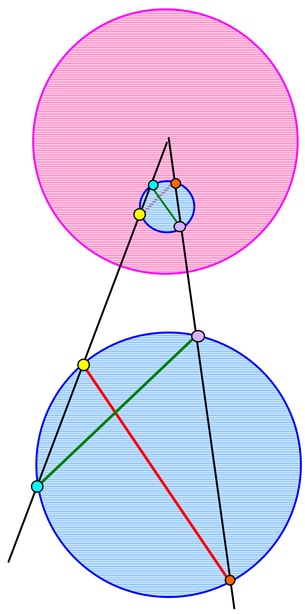
- Toda recta que une puntos correspondientes en dos circunferencias inversas forman ángulos iguales con las tangentes a ellas en dichos puntos y se conoce como recta isogonal a ambas circunferencias.



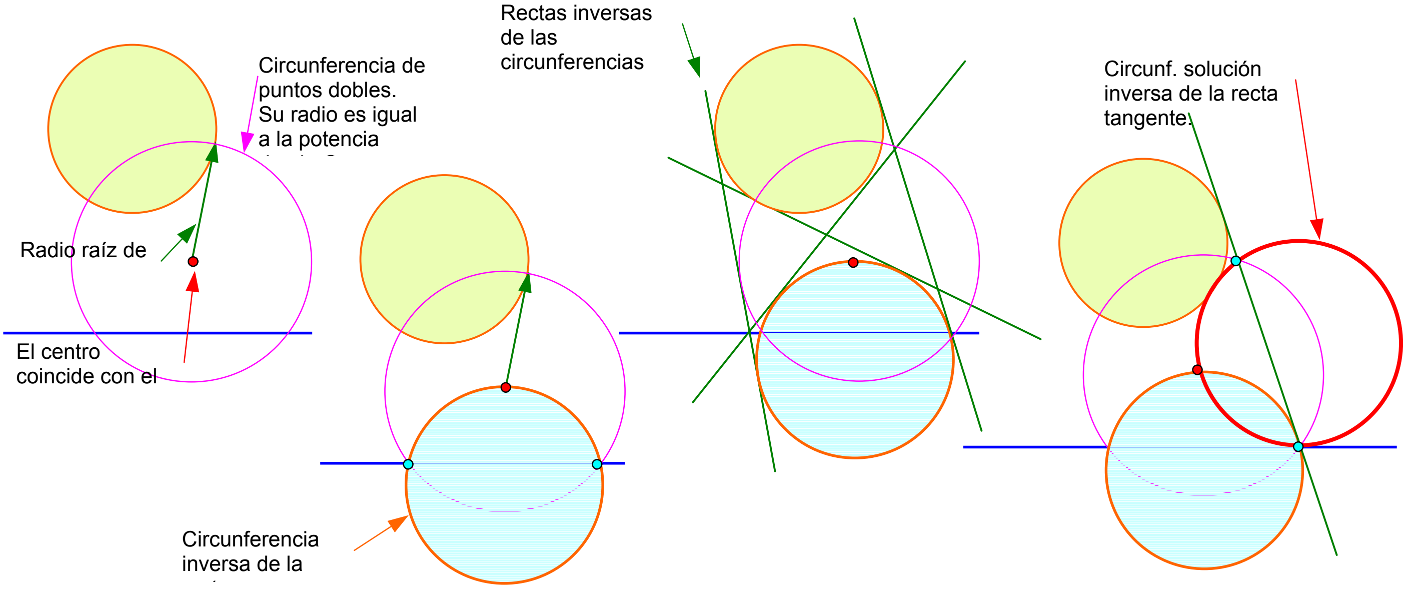
- Por todo par de puntos correspondientes a dos circunferencias inversas pasa una circunferencia tangentes en dichos puntos. Recíprocamente puede afirmarse que los puntos de contacto de una circunferencia tangente a otras dos, son puntos inversos según una de las inversiones que las ligan. Por tanto, al pasar esta circunferencia por un par de puntos inversos es ella inversa de sí misma e invariable en la inversión. Se la conoce como isogonal y forma los mismos ángulos con las dos circunferencias.

Métodos de trazado de circunferencias inversas

- En general se trata de encontrar tres puntos o los extremos de los diámetros de las circunferencias buscadas.

por triangulación	por el método del compás	por antiparalelismo: inútil
		

Un caso muy popular de aplicación de la inversión es la resolución del trazado por un punto de las circunferencias tangentes a dos dadas. A continuación se ofrece secuencialmente el desarrollo del trazado de las circunferencias tangentes por el punto P a una recta y una circunferencia dadas.



Trazar las circunferencias tangentes por el punto P a las dos circunferencias dibujadas. Tomando el punto dado como centro de la inversión y raíz de K igual a la potencia de una de las circunferencias, se logra que uno y otra no cambien en la inversión a la que se someterá la otra. Obtenidas las dos circunferencias inversas (una no ha cambiado), bastará trazar las rectas tangentes exteriores e interiores y sus circunferencias inversas serán las buscadas pues al no pasar las rectas anteriores por el centro de inversión O, si han de pasar las circunferencias solución como se pedía. En la figura sólo se ha trazado una de las tangentes y su circunferencia inversa.